ARKEA JA KOODAUSTA KOULUMATEMATIIKKAAN?

SAMULI SILTANEN

Digitaalinen maailmamme nojaa matematiikkaan. Jopa teinivillitykset tarvitsevat sitä: "Visco-tytöthän" kohentelevat valokuviaan älypuhelimen VSCO -sovelluksella. Kuten kaikki kuvankäsittelyohjelmat, myös VSCO muokkaa värisävyjä logaritmien, derivaattojen ja taajuusmuunnosten avulla.

IMAGE FOUND ON HTTPS://WALLPAPERSAFARI.COM/W/AZRTCE

Jokapäiväistä matematiikkaa edustavat myös nämä sovellukset:

• **Navigaattorin reitinmuodostus**.
Pohjaksi tarvitaan digitaalinen kartta, jossa tiet ja muut liikenneväylät on esitetty geometrisessa muodossa. Kun lähtö- ja päätepiste on annettu ja kulkuväline valittu, ohjelman täytyy periaatteessa käydä läpi kaikki mahdolliset reitit. Niiden pituus metreissä sekä matkan kesto sekunneissa täytyy määrittää, jotta käyttäjälle voi ehdottaa paria lyhintä vaihtoehtoa. Tämä kaikki vaatii paitsi laskennallista geometriaa myös optimointia eli edullisimman valinnan etsimistä.

• **Google-haun toiminta**
on monimutkainen ja liikesalaisuutena tarkoin varjeltu tietokoneohjelma. Mutta sen ytimessä on Googlen alkuperäisen menestyksen salaisuus eli PageRank-algoritmi. Lähtökohta on valtava ruudukko, kuin Saharan autiomaan kokoinen Excel-taulukko, jossa on kutakin internetin sivua kohti yksi rivi ja yksi sarake. (Tätä varten täytyy siis numeroida kaikki internetin sivut. Siinäpä iltapuhde!) Ruudukon riville 3 merkitään ykkönen sarakkeeseen 7, jos internetin sivulta numero 3 on linkki sivulle numero 7. Jos linkkiä ei ole, ruutuun lätkäistään nolla. Näin täytettyä ruudukkoa käsitellään matemaattisena *matriisina* ja lasketaan sen suurin *ominaisarvo*. Sitä vastaavassa *ominaisvektorissa* on hakutulos eli kunkin verkkosivun osuvuus hakuun.

• **Kolmiulotteinen röntgenkuvaus**.
Sairaaloissa tietokonetomografia eli TT-kuvaus on perustyökalu. Se paljastaa potilaan sisäisen rakenteen millintarkasti viipalekuvien muodossa. Kuvanmuodostus tapahtuu epäsuorasti. Ihmisestä otetaan ensin röntgenkuvia monesta eri suunnasta suuren munkkirinkilän näköisellä vekottimella. Viipalekuva luodaan jälkeen päin yhdistelemällä röntgenkuvien pikseliarvoja matemaattisesti. Menetelmä muistuttaa korkeaulotteisen sudokun ratkaisemista ja perustuu yhtälöryhmän ratkaisemiseen.

• Suuresti kohuttu **tekoäly**
eli maanläheisemmin *koneoppiminen* ottaa suorittaakseen yhä useampia ihmisen hommiksi ajateltuja tehtäviä. Se tunnistaa kissat ja koirat valokuvista ja hoitaa shakinpeluun puolestamme. Se tuskin ratkaisee kaikkia ongelmia, mutta sen voimin julkiset palvelut, älypuhelinsovellukset ja pesukoneet muuttuvat fiksummiksi. Pohjimmiltaan kaikki tämä edistys perustuu matriisilaskuun ja optimointiin laskennallisissa malleissa. Niissä suuri määrä simppeleitä hermosolun lailla käyttäytyviä laskuyksiköitä on yhdistetty toisiinsa mutkikkailla tavoilla.

• **Sähkökitaran efektilaite**
tuottaa soittoon AC/DC:n särömurinaa tai Chisutyyliseen elektroniseen musiikkiin sopivaa maalailevaa sävyä. Kielen värähtelyt muutetaan ensin numeromuotoon: äänenpainetta kuvaava luku merkitään muistiin kymmeniä tuhansia kertoja sekunnissa. Äänen muokkaus onnistuu yksinkertaisimmillaan niin, että signaalin peräkkäisiä summataan painotetusti yhteen *konvoluutioksi* kutsutulla operaatiolla. Jo niin saadaan laaja valikoima huikeita efektejä, mutta todellinen muusikon aarreaitta syntyy epälineaarisia matemaattisia kaavoja käyttämällä.

Miksi emme veisi koulun oppisisältöjä lähemmäksi nykypäivän laskennallista matematiikkaa? Näin saisimme tunnit kiinnostavammiksi. Kaikille oppilaillehan matikkatehtävien ratkaiseminen ei maistu pelkästä laskemisen ilosta, mutta yhteys oikean elämän tapahtumiin voisi innostaa heidätkin funktioiden ja laskusääntöjen pariin. Samalla koululaiset pääsisivät kurkistamaan digitaalisen

todellisuuden konepellin alle ja valmistautumaan sen haltuun ottamiseen.

Millaisista muutoksista on kysymys?

Sisältötasolla ottaisin lukion ohjelmaan matriisilaskun ja yläasteelle pohjustukseksi yhtälöparien lisäksi yhtälöryhmät.

Yhtälöryhmät ja matriisit saa selostettua valokuvallisen esimerkin kautta. Ajatellaan kuvaa kauniista talosta, jonka edessä harmillisesti lentää varis. Lintu on vieläpä liike-epäterävyyden vuoksi aivan sumea. Kuva olisi ilman lintua täydellinen! Mitä voimme tehdä?

Otaksutaan olevamme niin onnekkaita, että samea varis osuu kuvassa tasaisen seinäpinnan kohdalle. Silloin voimme käyttää *harmonista kuvanpaikkausta* tuon häiritsevän linnun poistamiseen.

Opetuksen voi aloittaa ihan yksittäisen pikseliarvon korvaamisella ympäröivien neljän pikselin keskiarvolla. Se on helppo alakoulutason lasku ja tuo esiin harmonisen kuvanpaikkauksen idean: täydennetään kuva niin, että värin muutokset naapuripikseliarvosta toiseen ovat mahdollisimman mietoja.

Kahden vierekkäisen pikselin kuvanpaikkaus johtaakin jo yhtälöpariin. Kummankin pikselin arvon pitäisi olla keskiarvo neljästä naapurista, mutta kummallakin pikselillä on kaverina sellainen, jonka arvoa olemme määrittämässä. Tämän pitäisi onnistua yläkoululaiselta.

Matriisilaskun tuominen lukioon mahdollistaisi kolmenkin puuttuvan pikselin värittämisen ihan käsin laskemalla. Koodauksen yhdistäminen tähän varustaisi oppilaat ihan oikealla sovelletun matematiikan voimalla: jos osaa kirjoittaa Octavessa tai Pythonissa vaikka neljän pikselin paikkaamisen, aika lailla samalla vaivalla menevät tuhannetkin pikselit. Se on jo realistista kuvankäsittelyä.

Lisähavainnollistusta yhtälöryhmistä ja kuvanpaikkauksesta on tarjolla Samun tiedekanavalla YouTubessa. Suosittelen videoita

- *Samun tiedepläjäys: ahvenenpoisto*,
- *Matematiikan ihmeitä: matriisilasku,*
- *Kohteiden poistaminen kuvasta matematiikan avulla*

Vielä muista sisältölisäyksistä: optimointia voisi aivan hyvin pitää esillä jo alakoulussa. Lapset voisivat laskea navigaattorin tapaan eri reittien pituuksia kartalla ja kokeilla niitä itse maastossa. Paperista askartelemalla voisi tutustua siihen, minkä muotoinen säiliö vetää sisäänsä eniten riisinjyviä, jos käytettävän paperin määrä on sama.

Opintien edistyessä optimointia voisi tehdä yhä enemmän kaavojen ja muodollisten päättelyjen kautta, huipentuen lukiossa derivaatan nykyistä monipuolisempaan käyttöön. Esimerkiksi laaksonpohjan etsiminen tunturi-Lapin kartalta askeleittain gradienttia käyttäen toisi moniulotteisen analyysin luontevalla tavalla mukaan.

Käytännön opetukseen toisin ryhmätyönä toteutettavia mallinnustehtäviä. Oppilaat voivat käyttää älypuhelinta äänien nauhoittamiseen ja valokuvien ottamiseen. Kerättyä digitaalista dataa saa muokattua tietokoneessa tai tabletissa matematiikan avulla. Ääni kuulostaa konvoluutiolla suodatettuna vaikka maan alta tulevalta tai ylimaallisen kuulaalta. Kuvia taas voi yhdistellä niin, että jokaisella kuvassa olijalla on paras ilme.

Ryhmätyöehdotus: nauhoitetaan lyhyt lause älypuhelimella. Avataan digitaalinen äänisignaali tietokoneessa ja muutetaan se kaksibittiseksi. Tähän liittyy kivaa pohdintaa kaksilukujärjestelmästä ja lukujen pyöristämisestä. Kun kaksibittisen äänitiedoston kuuntelee, sen sanoista ei saa mitään selvää. Mutta: jos yleisölle soittaa heti perään saman

ääninäytteen hyvälaatuisena, sen jälkeen kaksibittisenkin ymmärtää. Ja mikä hauskinta, takaisin eiymmärryksen pariin ei enää pääse, vaan lauseesta saa aina vain selvää, kun on kerran kuullut hyvälaatuisen version! Tästä sukeutuukin sitten filosofian tunnille pohdiskeltavaa ja oppilaille motivaatiota hakeutua kognitiotieteen opintojen pariin.

Toinen ryhmätyöehdotus: koulun pihalla välitunnilla laitetaan kamera jalustalle osoittamaan seinää kymmenen metrin päästä. Otetaan muutama kymmenen kuvaa, joissa seinän ja kameran välissä esiintyy ihmisiä satunnaisissa kohdissa. Jos laskemme näiden kuvien pikseliarvojen keskiarvon, näemme seinän edessä läpikuultavia haamuja. Jos vaihdamme keskiarvon mediaaniin, kuvaan jää pelkkä seinä. Väitän, että jokainen työryhmän jäsen muistaa mediaanin ja keskiarvon eron lopun ikäänsä.

Laittakaamme matematiikka, ohjelmointi, digitaalinen data ja iloinen ryhmätyö kohtaamaan!

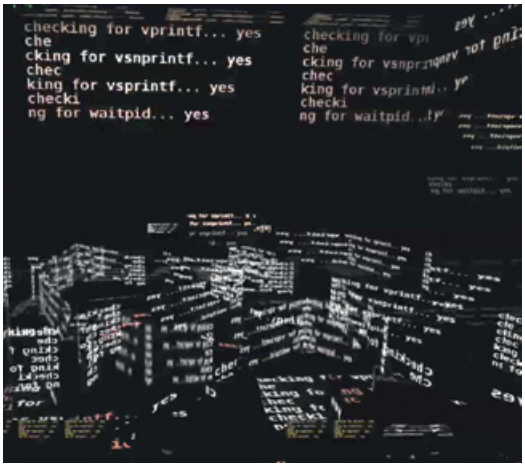

IMAGE FOUND ON HTTPS://WALLPAPERSAFARI.COM/W/IADXOM

KIRJOITTAJA

SAMULI SILTANEN
PROFESSOR OF INDUSTRIAL MATHEMATICS
VICE DEAN OF THE FACULTY OF SCIENCE
UNIVERSITY OF HELSINKI, FINLAND
TEL. +358 29 415 1420
HOMEPAGE: WWW.SILTANEN-RESEARCH.NET

YOUTUBE: SAMUN TIEDEKANAVA
HTTPS://WWW.YOUTUBE.COM/C/SAMUNTIEDEKANAVA
INSTAGRAM: SAMUNTIEDE