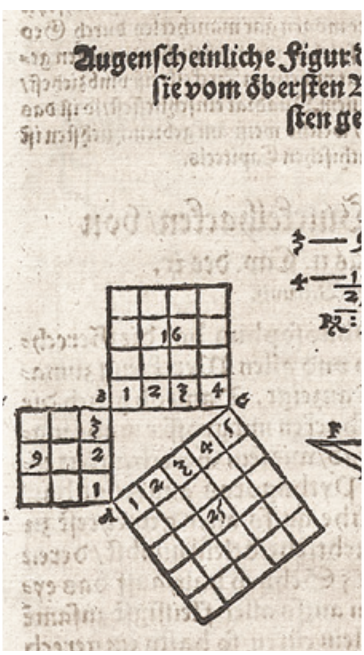
KAISA KANGAS | **MATEMATIIKAN RAJOILLA**

Monet mieltävät matematiikan liittyvän ensisijaisesti lukuihin ja laskemiseen. Matemaatikon näkökulmasta matematiikassa keskeisempää on kuitenkin looginen ajattelu ja ongelmanratkaisu. Laskutoimituksia pystyy konekin tekemään, matemaattisia päättelyitä usein ei.



MARCUS VITRUVIUS POLLIO JA WALTHER HERMANN RYFF 1575

Tieteellistä tutkimusta tekevän matemaatikon työ on tyypillisesti erilaisten matematiikkaa koskevien väitteiden *todistamista*. Matemaatikko lähtee liikkeelle oletuksista ja argumentoi logiikkaa käyttäen, miten niistä päädytään tiettyyn johtopäätökseen. Antiikin Kreikassa matemaatikot todistivat esimerkiksi, että kolmion kulmien summa on 180 astetta (tai geometrisemmin ilmaistuna että kulmat yhdessä muodostavat oikokulman). Toinen koulusta tuttu antiikissa todistettu tulos on Pythagoraan lause.

Geometristen kuvioiden lisäksi loogista päättelyä voi soveltaa lukuihin ja niiden välisiin suhteisiin tai muihin koulun matematiikasta tuttuihin käsitteisiin. Tutkijan työssään käyttämä matematiikka kuitenkin liikkuu yleensä abstraktimmissa sfääreissä, mutta siinäkin on pohjimmiltaan kyse loogisesta päättelystä. Myös logiikka itsessään ja sen soveltaminen matemaattisissa päättelyissä on matematiikan piiriin kuuluva tutkimuskohde, eräänlainen risteymäkohta matematiikan ja filosofian välillä.

Logiikkaa voi ajatella kokoelmana sääntöjä, joiden avulla edetään oletuksista johtopäätöksiin. Jos esimerkiksi tiedetään, että 1) Sokrates on ihminen ja 2) kaikki ihmiset ovat kuolevaisia, niin voidaan loogisesti päätellä, että 3) Sokrates on kuolevainen. Olennaista on, että jos oletukset 1) ja 2) ovat tosia, niin myös johtopäätöksen 3) on oltava totta. Mikäli oletukset eivät kuitenkaan ole totta, ei päättelyn johtopäätöskään välttämättä pidä paikkaansa. Jos Sokrates olisikin jumala, ei hän ehkä olisikaan kuolevainen, sillä oletus 1) ei tällöin pitäisi paikkaansa ja oletus 2) koskee vain ihmisiä.

Matematiikassa olennaiseksi kysymykseksi nousee, miten oletukset tulisi valita. Tätä pohdittiin jo antiikin Kreikassa. Silloin ajatuksena oli, että oletuksiksi eli aksioomiksi pitäisi valita mahdollisimman yksinkertaisia väitteitä, jotka ovat niin itsestään selviä, ettei kukaan voi epäillä niiden todenmukaisuutta. Esimerkiksi yksi antiikin geometrian aksioomista oli, että kaikki annetun janan kanssa samanmittaiset janat ovat myös keskenään samanpituisia.

Aksioomien ajateltiin pitkään kuvastavan absoluuttista, fysikaalista tai Jumalan luomaa todellisuutta. Tätä ajattelutapaa alettiin kuitenkin kyseenalaistaa 1800-luvun puolivälin tienoilla, kun löydettiin uudenlaisia geometrioita, joissa kaikki antiikista tutut aksioomat eivät päteneetkään. Siirryttäessä 1900-luvulle moni matemaatikko oli omaksunut toisenlaisen näkökulman. Matematiikkaa saattoi ajatella myös pelinä, jossa aksioomat sai valita vapaasti, mutta niistä oli edettävä johtopäätöksiin logiikan sääntöjä noudattaen. Matemaatikot saattoivat siis luoda vaihtoehtoisia maailmoja, joissa päti erilaiset perusoletukset.

Heräsi kysymys, voisiko kaiken matematiikan kuitenkin kuvata jonkin yksittäisen aksioomajärjestelmän sisällä. Monesti matemaattisia käsitteitä voi nimittäin esittää toisenlaisten matemaattisten käsitteiden avulla. Kyse on hieman samantapaisesta asiasta kuin se, että tietokoneen ruudussa näkyvät kuvat tai koneen soittamat äänet on koodattu bittijonoiksi, joina kone niitä käsittelee. Samalla tavoin matematiikan alueita voi joskus kuvata toisten matematiikan alueiden sisällä. Esimerkiksi erilaiset geometriat on mahdollista koodata luvuiksi antamalla pisteille koordinaatit ja käsittelemällä geometrisia objekteja niiden avulla.

Yhdellä aikansa vaikuttavimmista matemaatikoista, saksalaisella **David Hilbertillä** (1862-1942) oli suuri unelma kokonaisvaltaisesta systeemistä, joka kattaisi kaiken matematiikan. Systeemi muodostaisi vankan ja yhtenäisen perustan matematiikalle tieteenä. Hilbert oli niin vaikutusvaltainen matemaatikkoyhteisössä, että hän pystyi pitkälti määrittämään mitä tutkittiin. Kun hän vuonna 1900 julkaisi listan matemaattisia ongelmia uudelle vuosituhannelle, nuoret matemaatikot kävivät innolla niiden kimppuun.

Vuonna 1920 Hilbert ehdotti matemaatikkoyhteisölle *Hilbertin ohjelmana* tunnettua metamatemaattista tutkimusohjelmaa. Sen tavoitteena oli toteuttaa Hilbertin unelma eli löytää lopullinen aksioomajärjestelmä, jonka sisällä voisi käsitellä kaikkea matematiikkaa. Hilbertin vaatimuksena oli, että järjestelmän aksioomat ja matemaattiset väitteet tulisi voida ilmaista täsmällisellä symbolikielellä, ja käytössä olevat loogiset säännöt olisi määriteltävä selkeästi. Lisäksi järjestelmän olisi täytettävä tiettyjä edellytyksiä. Järjestelmän puitteissa täytyi pystyä todistamaan kaikki matemaattiset väitteet, jotka olivat totta, eivätkä järjestelmän osat saaneet olla keskenään loogisessa ristiriidassa.

Hilbert uskoi, että tällainen järjestelmä pystyttäisiin löytämään ja että matemaattinen prosessi olisi päälle päätteeksi vieläpä mahdollista automatisoida. Nykynäkökulmasta katsottuna tämä tarkoittaa, että voitaisiin laatia tietokoneohjelma, joka kertoo, onko siihen syötetty matemaattinen väite totta. Tietokoneeseen siis ohjelmoitaisiin aksioomat ja loogiset päättelysäännöt, ja sopivaa algoritmia soveltaen se selvittäisi, olisiko syötetty väite yhteensopiva aksioomien kanssa.

Vuonna 1931 nuori wieniläinen **Kurt Gödel** (1906-1978) kuitenkin romautti Hilbertin unelmalta pohjan todistamalla kuuluisat epätäydellisyyslauseensa. Lauseet kertoivat, että mikään aksioomajärjestelmä ei voinut sisältää kaikkia matemaattisia totuuksia. Jos matemaattinen järjestelmä oli riittävän monimutkainen sisältääkseen luonnolliset luvut (1,2,3, jne) ja niillä tehtävät laskutoimitukset, oli aina olemassa tosia väitteitä, joita ei kuitenkaan pystynyt todistamaan järjestelmän puitteissa. Tällaisen väitteen saattoi aina lisätä järjestelmään uudeksi aksioomaksi, mutta myös näin saadussa uudessa, laajemmassa järjestelmässä oli aina tosia väitteitä, joita ei sen raameissa pystynyt todistamaan.

Gödelin todistuksen perusidea on seuraava. Kuvitellaan, että on olemassa totuusohjelma, jolle syötetään väitelauseita. Ohjelma voi sanoa väitteen olevan tosi tai epätosi, mutta sen on noudatettava seuraavaa kahta sääntöä:

- Jos syötetty väite on tosi, ohjelma ei sano että se on epätosi;
- Jos syötetty väite on epätosi, ohjelma ei sano että se on tosi.

Mutta mitä tapahtuu, jos ohjelmaan syötetään lause ”Totuusohjelma ei sano, että tämä lause on tosi”?

Jos ohjelma sanoisi, että lause on tosi, se ei olisikaan totta. Ohjelma ei siis voi sanoa sitä todeksi rikkomatta sääntöä 2). Jos taas ohjelma sanoisi, että lause on epätosi, se olisikin totta (sillä ohjelma ei olisi sanonut lausetta todeksi). Niinpä ohjelma ei voi sanoa sitä epätodeksi rikkomatta sääntöä 1). Ohjelmalle ei siis jää muuta vaihtoehtoa kuin vaieta. Mutta nytpä lause onkin tosi, sillä ohjelma ei ole sanonut, että se on tosi. On siis löytynyt väitelause, joka on totta, mutta jonka totuusohjelma ei sano olevan sen paremmin totta kuin epätottakaan.

Tätä ideaa soveltaen Gödel osoitti, että missä tahansa matemaattisessa järjestelmässä, joka on riittävän monimutkainen jotta sen sisällä voidaan kuvata luonnollisia lukuja, voidaan ilmaista lause, joka sanoo ettei sitä voi järjestelmän puitteissa todistaa. Tällainen lause on tosi mutta ei todistettavissa. Hilbertin unelma oli osoittautunut mahdottomaksi toteuttaa.

Laajalti vallassa ollut käsitys matematiikan olemuksesta ei pitänytkään paikkaansa. Mitään lopullista, vakaata perustaa ei ollut. Monet pitävät tätä niin merkittävänä maailmankuvan muutoksena, että sitä on sanottu yhdeksi matematiikan suurista kriiseistä.

Vaikka Gödelin tulokset olivat monelle pettymys, tämä itse piti niitä lohdullisina. Nehän osoittivat, että matematiikkaa ei voinut koneellistaa. Jos matemaattisen totuusohjelman olisi voinut laatia, ei matemaatikoille olisi jäänyt muuta virkaa kuin syöttää siihen erilaisia väitteitä ja katsoa millaisen vastauksen ohjelma antaa. Gödel kokikin epätäydellisyyslauseiden korostavan inhimillisen intuition merkitystä matematiikassa.

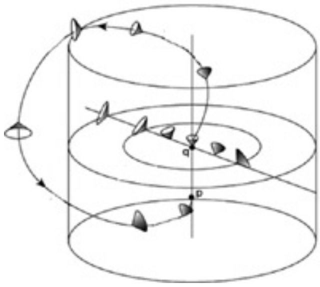
Gödelin epätäydellisyyslauseet antoivat kuoliniskun Hilbertin ohjelmalle sen alkuperäisessä muodossa, mutta tutkimus ohjelman viitoittamalla tiellä ei kuitenkaan tyrehtynyt. Oli vain tyydyttävä vähäisempään kunnianhimoon ja muotoiltava kysymyksiä uudestaan. Vaikka mikään aksioomajärjestelmä ei voinut sisältää *kaikkea mahdollista* matematiikkaa, oli kuitenkin mahdollista kehittää järjestelmiä, jotka sisälsivät merkittävän määrän matematiikkaa. Ajatellaan jopa, että on olemassa aksioomajärjestelmä, jonka sisällä voi käsitellä kaikkea sellaista matematiikkaa, jota ihmiset tulevat koskaan tarvitsemaan.

Gödel oli osoittanut, että mikä tahansa luonnolliset luvut käsittävä järjestelmä sisälsi väistämättä tosia lauseita, joita ei voinut järjestelmän puitteissa todistaa. Luonnolliset luvut eivät kuitenkaan ole matematiikan ainoa tutkimuskohde. On olemassa myös loogiselta rakenteeltaan yksinkertaisempia mutta silti kiinnostavia matematiikan osa-alueita. Jotkut näistä voi sisällyttää sellaiseen aksioomajärjestelmään, jonka puitteissa voi todistaa kaikki aihealuetta koskevat totuudenmukaiset väitteet. Myöskään haavetta totuusohjelmasta ei lopulta tarvinnut täysin haudata. Vaikka mikään algoritmi ei pysty määrittämään luonnollisia lukuja koskevien väitteiden todenmukaisuutta, on tällaisia algoritmeja kuitenkin mahdollista kehittää joillekin muille matematiikan osa-alueille.

Kun David Hilbert vuonna 1943 kuoli, hänen hautakiveensä kirjoitettiin sanat, joilla hän oli päättänyt eläkkeelle jäädessään 8.9.1930 pitämänsä puheen: *Wir müssen wissen. Wir werden wissen. Meidän täytyy tietää. Me tulemme tietämään.* Edeltävänä päivänä Kurt Gödel oli kertonut alustavasti epätäydellisyyslauseistaan.

Hilbertin hautajaiset jäivät pieniksi, sillä natsien puhdistukset olivat iskeneet saksalaisiin yliopistoihin. Hilbertin kollegoita oli tapettu ja vangittu, ja monet olivat lähteneet ulkomaille. Itävalta oli liitetty Saksaan vuonna 1938, eikä Gödel ollut sen jälkeen voinut jatkaa työskentelyä yliopistolla Wienissä koska oli aiemmin osallistunut Wienin piiriksi nimitetyn filosofisen koulukunnan kokoontumisiin, joissa kävi useita juutalaisia tutkijoita. Hilbertin kuollessa Gödel asui Yhdysvalloissa ja työskenteli Princetonin yliopiston Institute of Advanced Studyssa, samassa paikassa kuin Euroopasta paennut **Albert Einstein**.

Princetonissa Gödelin ja Einsteinin välille syntyi ystävyys, ja Gödel kiinnostui suhteellisuusteoriasta. Gödel perehtyi Einsteinin yhtälöihin ja löysi niille ratkaisun, joka mahdollisti matkustamisen ajassa taaksepäin. Tämän ratkaisun hän antoi Einsteinille 70-vuotislahjaksi.



KURT GÖDELIN SYNTYMÄPÄIVÄLAHJA ALBERT EINSTEINILLE

PHYSICS STACK EXCHANGE

KAISA KANGAS

ON VÄITELLYT FILOSOFIAN TOHTORIKSI 2015 MATEMATIIKKA PÄÄAINEENAAN. SEN JÄLKEEN HÄN ON TYÖSKENNELLYT TUTKIJATOHTORINA KOBEN YLIOPISTOSSA JAPANISSA JA HELSINGIN YLIOPISTOSSA. HÄNEN ERITYISALANSA ON MATEMAATTINEN LOGIIKKA.