

KAISA KANGAS | EKSPONENTIAALINEN KASVU JA LINEAARINEN INTUITIO

Vii-
mei-
sen
vuoden
aikana julki-
sessa keskustelus-
sa ja kommenttipalstoil-
la on toistunut kaksi kysy-
mystä. Suomessakin monet ovat
ihmetelleet, miksi otetaan käyttöön ko-
via koronarajoituksia, vaikka päivittäiset kuolin-
luvut ovat matalia eivätkä tartuntaluvutkaan korkeita
suhteessa väkilukuun. Toisaalta on hämmästelty, miten tartunta-
lukujen uusi nousu on voinut yllättää päättäjät ympäri maailmaa. Molem-
mat kysymykset ovat yhteydessä tapaan, jolla ihmismieli hahmottaa lukumääriä.

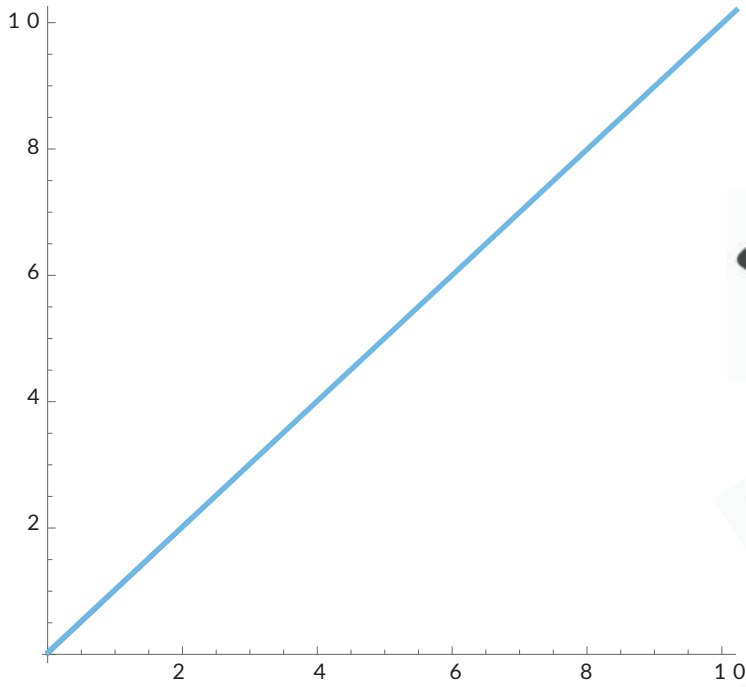
TEHDÄÄN muutama ajatuskoe. Leikitään, että pankki tekee kanssasi diilin: talletat tänään euron, ja tallettamasi summa kaksinkertaistuu joka päivä. Huomenna tilillä on siis kaksi euroa, ylihuomenna neljä ja niin edelleen. Kuinka kauan kestää ennen kuin sinusta tulee miljonääri? Koeta vastata arvaamalla, laskuja tekemättä.

Otetaan vielä toinen kysymys. Kuvitellaan valtavan suuri, millimetrin paksuinen paperiarkki. Arkki taitetaan ensin kahtia. Sitten kaksinkertainen paperi taitetaan jälleen, jolloin saadaan neljä paperikerrosta, yhteensä neljän millimetrin paksuudel-

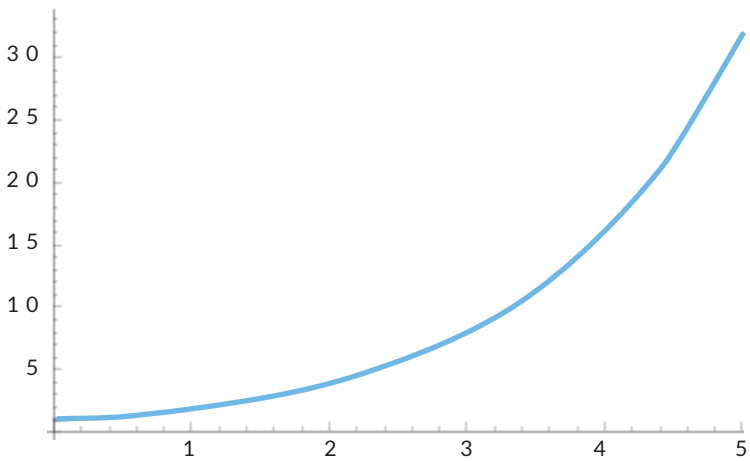
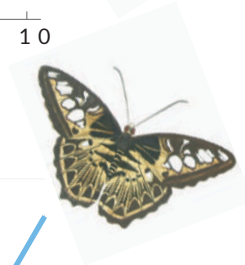
ta. Kuinka monta kertaa arkki pitäisi taittaa, jotta taitetusta paperista tulisi niin paksu, että se täyttäisi etäisyyden maasta kuuhun?

Vastaukset saattavat hämmästyttää: pankkitilillä on yli miljoona euroa 20 päivän kuluttua. Paperin taittelemisessa puolestaan riittää 39 kertaa – ainakin puhtaasti laskennallisesti. Käytännössä tuskin kuitenkaan löytyy riittävän suurta arkkiä, eikä paperi enää muutaman taitoksen jälkeen edes taivu kaksinkerroin.

Jos vastaukset tuntuivat yllättäviltä, ei se ole mikään ihme. Tutkitusti useimmat ihmiset arvioi-



KUN LINEAARISESTA KASVUSTA PIIRRETÄÄN KUVA KOORDINAATISTOON, SAADAAN SUORA VIIVA (KUVASSA TAPAUS, JOSSA SÄÄSTÖPOSSUUN LAITETAAN EURO PÄIVÄSSÄ).



EKSPONENTIAALISTA KASVUA ESITTÄVÄ KUVAAJA KOORDINAATISTOSSA (KUVASSA TAPAUS, JOSSA TILILLÄ OLEVA RAHASUMMA KAKSINKERTAISTUU PÄIVÄSSÄ).

vat tämäntyyppisissä tehtävissä lukumäärät väärin – usein myös ihmiset, jotka hallitsevat matematiikkaa. Kyse on eksponentiaalisesta kasvusta, jonka ympärille ihmisen intuitio taipuu huonosti.

Lineaarinen ja eksponentiaalinen kasvu

Eksponentiaalinen kasvu tarkoittaa sitä, että jokin lukumäärä kasvaa moninkertaistumalla. Ensimmäisessä ajatuskokeessa rahasumma kaksinkertaistui päivässä. Toisessa taas taitellun paperin paksuus kaksinkertaistui jokaisen taitoksen myötä.

Ihmiset ovat tottuneempia ajattelemaan kasvua tasaisina lisäyksinä kuin moninkertaistumisina. Jos laitat joka päivä säästöpossuun euron, siellä oleva rahamäärä kasvaa joka päivä yhdellä eurolla. Pankkitalletusta koskevassa ajatuskokeessa taas tilillä oleva summa kasvoi joka päivä isommalla rahamäärällä: ensimmäisenä päivänä sinne tuli yksi euro lisää, toisena kaksi, kolmantena neljä, jne. Jos jokin lukumäärä kasvaa koko ajan tasaisesti – säästöpossuun tulee päivittäin euro lisää tai omenapuussa kypsyy kolme omenaa päivässä – puhutaan lineaarisesta kasvusta. Kun siitä piirtää kuvaajan koordinaatistoon, saa suoran viivan.

Eksponentiaalisesta kasvusta on viimeisen vuoden aikana puhuttu paljon, sillä epidemioiden alkuvaiheessa tartuntamäärät tyypillisesti kasvavat eksponentiaalisesti. Mediajutuissa ja monien ihmisten mielikuvissa ”eksponentiaalisesta kasvusta” on tullut synonyymi hyvin nopealle, räjähdysmäiselle kasvulle. Tämä käsitys on kuitenkin virheellinen.

Eksponentiaalinen kasvu tarkoittaa yksinkertaisesti vain sitä, että jokin lukumäärä kasvaa moninkertaistumalla. Tällöin kasvu voi olla todella

nopeaa mutta ei kuitenkaan välttämättä. Tavalliselle pankkitilille talletettu rahakin kasvaa korkoa eksponentiaalisesti, mutta jokainen tietää, ettei se kovin äkkiä räjähdä miljoonapotiksi.

Kun jokin lukumäärä kasvaa moninkertaistumalla – siis eksponentiaalisesti – paljon riippuu siitä, missä ajassa se moninkertaistuu ja kuinka moninkertaiseksi se aina kerralla kasvaa. Kummassakin ajatuskokeessa puhuttiin kaksinkertaistumisesta, mutta moninkertaistuminen voi olla myös vaikka kolminkertaistumista, kymmenkertaistumista, puolitoistakertaistumista tai 1,2 -kertaistumista.

Jos pankkitilillä oleva euro kolminkertaistuisi päivässä, kuluisi yhden euron tallettamisesta 13 päivää miljoonamaisuuden saavuttamiseen. Todellisuudessa pankkitilin korko voi olla esim. 0,5%, mikä tarkoittaa, että tilillä oleva rahasumma 1,005 -kertaistuu kuukaudessa. Tällä vauhdilla yksi euro kasvaisi sadassa vuodessa 397 euroksi. Tahti on siis todella paljon hitaampi kuin summan kaksintaikolminkertaistuksessa. Molemmissa tapauksissa on kuitenkin kyse eksponentiaalisesta kasvusta – rahasumma kerrotaan jollakin tietyllä luvulla (eli kertoimella) tasaisin väliajoin. Kun tämä kerroin on 2 tai 3, on kasvu huomattavasti nopeampaa kuin jos se on 1,005.

Koronan yhteydessä on puhuttu paljon ns. tartuttavuusluvusta eli R-luvusta. Tämä luku kertoo, kuinka monta uutta ihmistä yksi viruksen kantaja keskimäärin tartuttaa. Jos jokainen sairastunut tartuttaa kaksi muuta, tartuntamäärät kaksinkertaistuvat tasaisin väliajoin. Esimerkiksi maaliskuussa 2020 Yhdysvaltojen tartuntaluvut kaksinkertaistuivat suunnilleen kolmessa päivässä. Tartuttavuusluku antaa siis kertoimen, joka kuvastaa tartuntamäärien moninkertaistumista.

Mitä pienempi tämä kerroin on, sitä hitaammin tartuntamäärät kasvavat. Jos yksi viruksen

kantaja tartuttaa keskimäärin kaksi tai kolme ihmistä, tartuntaluvut kaksin- tai kolminkertaistuvat säännöllisin välein. Mutta jos hän tartuttaa keskimäärin vain 1,2 ihmistä, luvut vain 1,2 -kertaistuvat. Tartuntavauhtia onkin kautta maailman pyritty hidastamaan määräämällä sairastuneita karanteeniin ja vähentämällä ihmisten sosiaalisia kontakteja erilaisilla rajoituksilla ja suosituksilla.

Paljon on puhuttu myös siitä, että epidemia hiipuu, jos tartuttavuusluku laskee alle yhden. Tällöin on kyse eksponentiaalisesta vähenemisestä. Ajatellaan tilannetta, jossa saat huomenna euron, ylihuomenna puolet siitä eli 50 senttiä, sitä seuraavana päivänä puolet tästä eli 25 senttiä ja niin edelleen. Matemaattisesti ilmiö on täysin samanlainen kuin eksponentiaalinen kasvu, mutta kertoimena on nyt puoli, eli 0,5. Vastaavalla tavalla vähenevät uusien tartuntojen määrätkin, kun tartuttavuusluku painuu alle yhden.

Intuitio ja virhearviot

Palataan alun kysymyksiin. Miksi korona-aikana on otettu käyttöön koviakin rajoituksia, vaikka päivittäiset tartuntamäärät ovat olleet suhteellisen alhaisia? Entä miksi korona on toistuvasti yllättänyt eri maiden päättäjät?

Kumpikin kysymys liittyy siihen, että ihmiset ovat tottuneet ajattelemaan kasvua lineaarisena. Siksi useimmat ihmiset eivät hahmota eksponentiaalista kasvua intuitiivisesti, mikä johtaa virhearvioihin. Jos uutisissa kerrotaan, että tänään on havaittu 30 uutta tartuntaa, määrä saattaa tuntua alhaiselta. Sitä ikään kuin puolivahingossa olettaa, että kasvuvauhti pysyy tasaisena, ja tartuntoja tulee jatkossakin 30 päivässä.

Tosiasiassa olennaista ei kuitenkaan ole päivittäisten tartuntojen määrä, vaan kasvuvauh-

ti. Jos luvut kaksinkertaistuvat kolmen päivän välein – kuten Yhdysvalloissa maaliskuussa 2020 – nousevat ne kuukaudessa 30 päivittäisestä tartunnasta noin 30 720 päivittäiseen tartuntaan.

Alhaisistakin päivittäisistä lukemista voidaan siis nopealla kasvuvauhdilla päätyä äkkiä tilanteeseen, jossa terveydenhuollon kapasiteetti ylittyy. Näin on käynytkin joissakin maissa, joiden poliittiset päättäjät arvioivat epidemian alkuvaiheen matalien tartuntalukujen perusteella, että tilanne ei voi olla kovin vakava. Los Angelesissa terveydenhuolto ylikuormittui tammikuussa, eikä sairaaloihin enää otettu esimerkiksi sydänkohtauksen saaneita, ellei näitä ollut saatu elvytettyä ennen sairaalaan tuomista.

On paljon tutkimusnäyttöä siitä, että ihmiset ovat taipuvaisia arvioimaan eksponentiaalista kasvua kuin se olisi lineaarista. Tämä lienee vaikuttanut myös joidenkin päättäjien toimintaan. Viime kesänä Joris Lammers, Jan Crusius, ja Anne Gast julkaisivat tutkimuksen, jossa käsiteltiin ihmisten kykyä hahmottaa eksponentiaalista kasvua nimenomaan koronavirusepidemian yhteydessä. Siinä vastaajia oli pyydetty arvioimaan kuinka koronaviruksen tartuntaluvut olivat kehittyneet viiden vuorokauden aikana.

Vaikka pieni osa vastaajista todella pystyi arvioimaan eksponentiaalista kasvua oikein, valtaosa kuvitteli sen olevan hitaampaa kuin todellisuudessa. Nämä virhearviot vaikuttavat juontavan juurensa sitkeään mielikuvaan, että kaikki kasvu käyttäytyy lineaarisesti. Tämä johti myös siihen, että vastaajat arvioivat edeltävien päivien tartuntaluvut todellista suuremmiksi. Heistä ei tuntunut uskottavalta, että kasvu olisi voinut todella olla niin nopeaa, että varsin pienistä luvuista oli parissa päivässä päädytty melko suuriin.

Aiemmissa eksponentiaalista kasvua ja ih-

misten hahmotustapaa koskeissa tutkimuksissa on ilmennyt, että ihmiset luottavat omiin arvioihinsa suurella itsevarmuudella. Mikä pahinta, kaikkein suurin usko omaan intuitioonsa on niillä, jotka ymmärtävät eksponentiaalista kasvua kaikkein vähiten ja takertuvat lineaariseen ajattelutapaan kaikkein voimakkaimmin. Tämä selittää sitä, miksi koronatoimet voivat tuntua järjenvastaisilta matalien lukujen valossa.

Täysin epätoivoinen tilanne ei kuitenkaan ole. Lammersin ja kumppanien tutkimuksen perusteella vaikuttaa siltä, että ihmiset kyllä hahmottavat eksponentiaalista kasvua, jos asia esitetään oikealla tavalla. Vastaajien arviot paranivat, kun kyselyn alussa varoitettiin, että monet unohtavat tartuntojen kasvuvauhdin nopeutuvan joka päivä ja että ne kaksinkertaistuvat joka kolmas päivä.

Vielä parempaan tulokseen päästiin, kun vastaajia pyydettiin lopullisen arvion lisäksi arvioimaan tartuntamääriä kolmen päivän välein. Pääasiallisena kysymyksenä oli, paljonko uusia tartuntoja tulisi 15 päivän kuluttua. Vastaajilta kuitenkin kysyttiin myös paljonko niitä tulisi kolmen, kuuden, yhdeksän, ja 12 päivän jälkeen.

Lammers on BBC:n haastattelussa todennut pitävänsä median tapaa raportoida koronalukuja huonona. Päivittäiset tartuntaluvut eivät välitä kokonaiskuva, vaan niiden lisäksi pitäisi uutisoida kasvuvauhdista. Lukemien lisäksi voisi kertoa vaikkapa kuinka suurista tartuntamääristä tulevat olemaan kuukauden tai parin päästä, mikäli tahti pysyy ennallaan. Tämä auttaisi hahmottamaan tilannetta, kun lukija ei olisi pelkästään oman – hyvin suurella todennäköisyydellä lineaarisen – intuitionsa varassa.

Asia ei lakkaa olemasta tärkeää sitten, kun koronaepidemia joskus päättyy. Moneen muuhunkin luonnonilmiöön liittyy eksponentiaalinen kasvu. Se on myös läsnä arjessa esimerkiksi raha-asioiden kautta. Vaikkapa lainoista maksettavat korkosummat kasvavat eksponentiaalisesti. Onneksi jo alakouluikäisenä voi alkaa harjoittaa eksponentiaalista intuitiota ja opetella ymmärtämään moninkertaistuvan kasvun perusidea: jos saat euron tänään ja rahamäärä kaksinkertaistuu joka päivä, kuinka monta euroa sinulla on neljän päivän päästä? Entä kuinka kauan menee ennen kuin sinulla on sata euroa? Arvaa ensin ja laske sitten.

KAISA KANGAS

ON VÄITELLYT FILOSOFIAN

TOHTORIKSI 2015 MATEMATIIKKA

PÄÄAINEENAAN. SEN JÄLKEEN HÄN

ON TYÖSKENNELLYT TUTKIJATOHTORINA

KOBEN YLIOPISTOSSA JAPANISSA

JA HELSINGIN YLIOPISTOSSA. HÄNEN

ERITYISALANSA ON MATEMAATTINEN LOGIIKKA.

