PROVINCETOWN 1916.
MARSDEN HARTLEY (1877–1943), CUBIST.
THE ART INSTITUTE OF CHICAGO, ALFRED STIEGLITZ COLLECTION

KAISA KANGAS

Sanoin kuvaamattomat irrationaaliluvut

Antiikin Kreikassa tehtiin merkittävä ja yllättävä matemaattinen löytö, jonka monet uskovat aiheuttaneet matemaattisen kriisin. Tarinoiden mukaan kyse oli niin järisyttävästä asiasta, että keksinnön tekijä tapettiin. Matematiikan historian mullistukset liittyvät tyypillisesti matemaattisen tiedon suhteellistumiseen, ja siitä tässäkin on kyse.

PLATON JA ARISTOTELES, ATEENAN KOULU, YKSITYISKOHTA. RAFFAELLO SANZIO 1509. PALAZZO APOSTOLICO, ROOMA.

Kreikkalaiset matemaatikot havaitsivat ilmiön, joka tunnetaan *yhteismitattomuutena*: ei ollut mitään universaalia mittatikkua, "kaiken mittaa", jonka avulla kaikki geometriset pituudet voisi ilmaista helposti. Tämä hankaluus johtui *irrationaalilukujen* olemassaolosta, josta antiikin matemaatikot eivät olleet aiemmin olleet tietoisia. Yhteismitattomuuden tajuaminen tapahtui käsi kädessä irrationaalilukujen löytymisen kanssa.

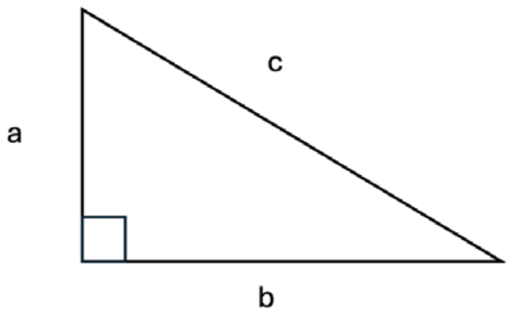
Irrationaaliluvulla tarkoitetaan lukua, jota ei voi esittää kahden kokonaisluvun osamääränä (kokonaislukuja ovat tavalliset, lukumääriä kuvaavat luvut 0, 1, 2, 3, 4, ja niin edelleen, sekä niiden vastaluvut -1, -2, -3, -4, ja niin edelleen). *Rationaalilukuja* puolestaan ovat ne luvut, jotka saadaan kahden kokonaisluvun osamääränä. Esimerkiksi ½ (puoli), ¾ (kolme neljäsosaa) ja 2 (eli 2/1) ovat rationaalilukuja.

Ennen yhteismitattomuuden hahmottamista kreikkalaiset ajattelivat, että kaikki suureet voitiin ilmaista kokonaislukujen avulla. Rationaaliluvut olivat implisiittisesti mukana heidän ajattelussaan kokonaislukujen välisinä suhteina. Esimerkiksi lukua ½ voi ajatella yhden suhteena kahteen ja lukua ¾ kolmen suhteena neljään.

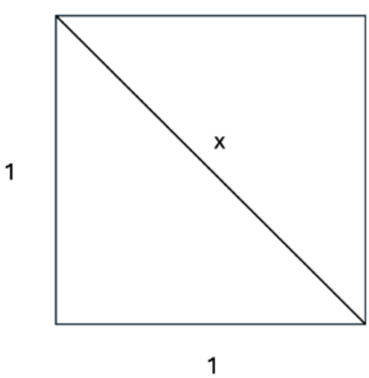
Geometriassa tämä uskomus tarkoitti sitä, että jos valittiin jokin mittatikku (sen saattoi valita minkä pituiseksi tahansa), niin minkä tahansa pituuden saattoi ilmaista suhteessa siihen. Toisin sanoen tarkasteltavan pituuden suhde mittatikkuun oli jokin rationaaliluku. Jos tämä suhde oli esimerkiksi ¾, tarkoitti se, että tarkasteltava pituus oli ¾ kertaa mittatikun mittainen, eli se saatiin mittaamalla ensin kolme kertaa mittatikun pituus ja ottamalla lopuksi neljäsosa saadusta pituudesta.

Kun jokin pituus voidaan ilmaista tällä tavoin kertomalla toista pituutta rationaaliluvulla, sanotaan, että pituudet ovat keskenään *yhteismitallisia*. Ennen yhteismitattomuuden löytymistä kreikkalaiset uskoivat, että kaikki pituudet olivat keskenään yhteismitallisia. Se tarkoitti, että minkä tahansa pituuden saattoi valita universaaliksi mittatikuksi. Näin ei kuitenkaan tosiasiassa ollut, ja kreikkalaiset matemaatikot käsittivät sen löytäessään yhteismitattomuuden, eli tajutessaan, että oli olemassa pituuksia, jotka eivät olleet keskenään yhteismitallisia. Tällaisia pituuksia sanotaan *yhteismitattomiksi*.

Yksinkertaisimman esimerkin yhteismitattomista pituuksista tarjoavat neliön sivu ja



KUVA 1
PYTHAGORAAN LAUSEEN MUKAAN SUORAKULMAISEN KOLMION PISIMMÄN SIVUN (HYPOTENUUSAN) NELIÖ (ELI TOINEN POTENSSI) ON KAHDEN LYHEMMÄN SIVUN, ELI KATEETTIEN, NELIÖIDEN (ELI TOISTEN POTENSSIEN) SUMMA. TOISIN SANOEN $c^2 = a^2 + b^2$



KUVA 2
KUN SOVELLETAAN PYTHAGORAAN LAUSETTA KUVAN NELIÖN SIVUJEN JA HALKAISIJAN MUODOSTAMAAN KOLMIOON, SAADAAN
$X^2 = 1^2+1^2 = 2$, ELI
$X^2 = 2$.
TÄSTÄ SAADAAN HALKAISIJAN PITUUDEKSI
$X = \sqrt{2}$

saman neliön halkaisija. Jos valitaan jokin mittatikku ja piirretään neliö, jonka sivu on tuon mittatikun pituinen, ei neliön halkaisijaa voi esittää helposti mittatikun avulla (tässä yhteydessä ”helposti” esittäminen tarkoittaa sitä, että halkaisijan pituus saataisiin kertomalla mittatikun pituus jollakin rationaaliluvulla). Jos neliön sivun pituus on rationaaliluku, niin halkaisijan pituus on irrationaaliluku. Esimerkiksi sivun pituuden ollessa 1 on halkaisija luvun 2 neliöjuuri (= 1,41421356...), joka on irrationaaliluku (tämä saadaan laskettua Pythagoraan lauseesta, jonka mukaan suorakulmaisen kolmion pisimmän sivun, eli *hypotenuusan* neliö on kahden lyhemmän sivun, eli *kateettien* neliöiden summa; ks. kuvat 1 ja 2).

Yhteismitattomuus tuotti paljon päänvaivaa kreikkalaisille matemaatikoille. Yhteismitattomuus oli nimittäin huomioitava geometrisissa päättelyissä, mikä teki niistä vaikeampia. Kyse ei kuitenkaan välttämättä ollut sellaisesta perustavanlaatuisesta matemaattisesta kriisistä, jollaisena yhteismitattomuus usein esitetään.

Liioiteltu kriisi?

Ei tiedetä tarkkaan, milloin yhteismitattomuus ja irrationaaliluvut löydettiin. Yksi varhaisimmista maininnoista yhteismitattomuudesta löytyy kuuluisan filosofi Platonin (n. 429–327 ennen ajanlaskun alkua) teoksesta *Theaitetos*, joka lienee kirjoitettu 300-luvun eaa. puolivälissä. Matemaattisen läpimurron on siis täytynyt tapahtua ennen sitä. Ei kuitenkaan ole yksimielisyyttä siitä, paljastuiko yhteismitattomuus matemaatikoille 300- vai 400-luvulla eaa.

Epäselvää on myös, kuka keksinnön teki. Legendoissa se liitetään yleensä pythagoralaisiin – salaseuraan ja filosofiseen koulukuntaan, joka harjoitti lukumystiikkaa ja perimätiedon mukaan myös matematiikkaa. Koulukannan perustajaa, Pythagorasta, on perinteisesti pidetty matemaatikkona, mutta osa tutkijoista kyseenalaistaa tämän näkemyksen. Heidän mukaansa Pythagoras oli pikemminkin mystikko eikä tehnyt matemaattisia keksintöjä. Pythagoraan mukaan nimettyä suorakulmaisia kolmioita koskevaa *Pythagoraan lausettakaan* ei nykyään yleisesti pidetä Pythagoraan saavutuksena.

Pythagoralaiset ajattelivat, että koko maailma koostui luvuista, ja heille luvut olivat kokonaislukuja. He uskoivat, että kokonaisluvut ja niiden väliset suhteet (eli rationaaliluvut) määrittivät kaiken. Tarinoiden mukaan irrationaaliluvut eivät istuneet tähän maailmankuvaan.

Kerrotaan, että pythagoralainen nimeltä Hippasos teki kammottavan havainnon: jos neliön sivun pituus oli 1, oli sen halkaisijan pituus outo, hirviömäinen luku, jota ei voinut esittää kahden kokonaisluvun suhteena. Koska tulos olisi romuttanut pythagoralaisten käsityksen lukujen harmoniasta, jonka varaan koko maailma rakentui, se päätettiin salata koulukuntaan vihkiytymättömiltä. Hippasos ei kuitenkaan malttanut pitää keksintöään omana tietonaan, vaan meni paljastamaan salaisuuden ulkopuolisille. Rangaistuksena hänet hukutettiin.

Tarina Hippasoksen surmaamisesta esitetään totena esimerkiksi Wikipediassa (ainakin vielä tätä kirjoittaessani). Yksikään antiikin lähde ei kuitenkaan nimeä Hippasosta yhteismitattomuuden löytäjäksi. Kuolemantuomiolegendastakin on useita keskenään ristiriitaisia versioita. Tarina saatetaan esimerkiksi liittää johonkin muuhun keksintöön kuin irrationaalilukuihin tai sitten rangaistus on jotakin muuta kuin hukuttaminen tai edes kuolema.

Antiikin Kreikan matematiikkaa tutkinut ranskalainen Paul Tannery (1843–1904) piti epäuskottavana myös sitä, että yhteismitattomuutta olisi ylipäänsä yritetty salailla. Hänen perustelunsa liittyvät matematiikkatieteen luonteeseen. On nimittäin kaksi vaihtoehtoa: ne yleiset matemaattiset periaatteet, joiden pohjalta yhteismitattomuus löydettiin, olivat joko yksin pythagoralaisten tiedossa tai sitten yleisesti tunnettuja. Ensimmäisessä tapauksessa totuuden paljastuminen ei olisi ollut vaaraksi pythagoralaisille, sillä ulkopuoliset eivät kuitenkaan olisi pystyneet ymmärtämään, mistä oli kyse – aivan kuten maallikko ei nykyaikanakaan yleensä pysty ymmärtämään matemaattisten tulosten sisältöä tai merkitystä.

Toisessa tapauksessa puolestaan totuuden kätkeminen ei olisi ollut edes mahdollista. Matematiikalle on nimittäin tyypillistä, että eri henkilöt päätyvät toisistaan riippumatta samoihin lopputuloksiin. Jos matemaattinen kehitys oli edennyt pisteeseen, jossa aika oli kypsä irrationaalilukujen löytämiselle, olisi joku pythagoralaisen koulukunnan ulkopuolelta joka tapauksessa pian löytänyt ne. Salaisuuden paljastaminen olisi korkeintaan nopeuttanut väistämätöntä prosessia.

Monissa matematiikan historiaa koskevissa teksteissä – etenkin hieman vanhemmissa – yhteismitattomuus kuvataan matematiikan perusteita järisyttäneenä kriisinä. Vaikka salailu- ja hukutustarinat olisivat olleet pelkkää sepitettä, löydös kuitenkin horjutti aiempia perustavanlaatuisia käsityksiä ja pakotti näkemään matematiikan uudella tavalla. Tämäkin tulkinta on sittemmin kyseenalaistettu.

Sekä Platon että tämän oppilas, filosofi Aristoteles (n. 384–322 eaa), olivat kiinnostuneita matematiikasta ja kirjoittivat irrationaaliluvuista. Kumpikaan ei kuitenkaan mainitse niiden yhteydessä mitään kriisiä. Pikemminkin Platon ja Aristoteles tuntuvat esittävän yhteismitattomuuden vain merkittävänä matemaattisena läpimurtona. Tuntuu oudolta, että nämä filosofit olisivat sivuuttaneet teksteissään perustavanlaatuisen matemaattisen kriisin, jos antiikin matematiikka olisi todella läpikäynyt sellaisen.

Vaikka yhteismitattomuus vaikeutti geometrikoiden työtä, kreikkalaiset matemaatikot keksivät neuvokkaita tapoja ratkaista siihen liittyvät ongelmat. Kenties irrationaaliluvut herättivätkin kauhistusta vasta myöhemmin, kun ne tulivat laajemman yleisön tietoisuuteen. Ehkäpä niissä koettiin olevan jotakin outoa ja hirviömäistä, joka sai ihmiset viljelemään kauhistuttavia vanhoja tarinoita.

Symbolisia ja kulttuurillisia merkityksiä

Nykymatematiikan näkökulmasta irrationaaliluvuissa ei ole mitään kummallista, vaan niitä voidaan käsitellä kuten mitä tahansa muitakin lukuja. Antiikin matemaatikkojen muotoilemat yhteismitallisuuden ja yhteismitattomuuden käsitteet eivät ole nykynäkökulmasta olennaisia. Lisäksi saksalais-venäläinen matemaatikko Georg Cantor (1845–1918) todisti 1800-luvulla, että irrationaalilukuja on enemmän kuin rationaalilukuja. Molempia on ääretön määrä, mutta Cantorin keskeinen oivallus oli siinä, että on olemassa keskenään eri kokoisia äärettömiä joukkoja (Olen kirjoittanut aiheesta aikaisemmin *Rihvelissä* 2/2017 otsikolla *Äärettömän äärellä*). Suurin osa reaaliluvuista (*reaaliluvut* ovat lukusuoran muodostavat luvut, eli kokonaisluvut ja kaikki mahdolliset desimaaliluvut) on irrationaalilukuja. Kummajaisia ovatkin siis pikemminkin rationaaliluvut kuin irrationaaliluvut.

Jo se, että irrationaalilukuja nimitetään irrationaalisiksi, kuitenkin kuvastaa sitä, kuinka ne on koettu oudoiksi ja vaikeaksi käsitettäviksi, sillä ne ovat kokemuksellemme vieraita. Irrationaalilukua ei voi esittää siistinä murtolukuna, ja sillä on epäjaksollinen päättymätön desimaaliesitys. Rationaalilukuja on suhteellisen helppo hahmottaa arkisten käsitteiden kautta – esimerkiksi sekamehua voi kuvailla sanomalla, että siitä 1/3 on mehutiivistettä ja 2/3 vettä. Irrationaaliluvuista ei ole yhtä selkeitä esimerkkejä, ja jo niiden olemassaolon perusteleminen vaatii matemaattisen argumentin, joka ei sovi yleistajuiseen artikkeliin vaikka onkin ymmärrettävissä lukiotiedoilla.

Taiteessa irrationaalilukuihin onkin ladattu symbolisia merkityksiä. Esimerkiksi kirjallisuuden Nobelilla palkittu, pääasiassa näytelmistään tunnettu irlantilaissyntyinen Samuel Beckett (1906–1989) viittaa irrationaalilukuihin romaanissaan *Murphy*. Mainitseepa hän pythagoralaiset ja Hippasoksen hukuttamisenkin.

*Murphy*ssä irrationaaliluvut symboloivat ihmismielen salattuja, käsittämättömiä ja alitajuisia osia sekä välitöntä kokemusta, jota ei voi kuvata kielellisesti. Sanallistamisen mahdottomuus rinnastuu yhteismitattomuuteen: siihen, että jotakin suuretta ei voi ilmaista käyttäen kokonaislukuja, jotka tavallaan muodostivat kreikkalaisen matematiikan kielen. Itse asiassa kreikkalaiset ovatkin käyttäneet irrationaaliluvuista sanaa *arrhetos*, se mitä ei voi ilmaista.

Myös suomalaista teatteriohjaaja ja kirjailija Juha Hurmetta (s. 1959) kiinnostavat irrationaaliluvut. Ylen Kulttuuricocktailiin kirjoittamassaan kolumnissa Hurme korostaa kyseenalaistamisen tärkeyttä. Esimerkiksi hän nostaa irrationaalilukujen keksimisen: itsestään selviksi hyväksyttyjä totuuksia on kyseenalaistettava, ja matematiikka auttaa siinä. Tarina pythagoralaisten kammottavasta salaisuudesta ja Hippasoksen kohtalosta tuskin on totta. Se voi kuitenkin silti valottaa sitä, kuinka matematiikka toisinaan pakottaa meidät muuttamaan maailmankuvaamme ja hyväksymään asioita, joita olisimme ennen pitäneet mahdottomina.

KAISA KANGAS

KIRJOITTAJA ON FILOSOFIAN TOHTORI (MATEMATIIKKA). HÄN KIRJOITTAA PARHAILLAAN TIETOKIRJAA MATEMATIIKAN YHTEYKSISTÄ FILOSOFIAAN JA IHMISTIETEISIIN.

FILOSOFI HIPPASUS METAPONTIUS. KUVITTEELLINEN MUOTOKUVA VUODELTA 1580 GIROLAMO OLGIATIN KIRJASSA "PHILOSOPHORUM ET SAPIENTUM EFFIGIES AB EORUM NUMISTATIBUS EXTRACTAE". WIKIPEDIA

ARTIKKELIA KIRJOITTAESSANI OLEN HYÖDYNTÄNYT SEURAAVIA TEOKSIA JA ARTIKKELEITA:

Abbott, Stephen 2023. *The Proof Stage: How Theater Reveals the Human Truth of Mathematics*. Princeton University Press.

Beckett, Samuel 2009 [1938]. *Murphy*. Faber and Faber.

Boyer, Carl 1994 [1968]. *Tieteiden kuningatar: Matematiikan historia, osa I*. Art House.

Burkert, Walter 1972. *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*. Harvard University Press.

Hurme, Juha 24.4.2019. "Hippasus ja omaksutun totuuden kyseenalaistaminen". *Ylen Kulttuuricocktail.* https://yle.fi/aihe/artikkeli/2019/04/24/juha-hurmeen-kolumni-hippasus-ja-omaksutun-totuuden-kyseenalaistaminen

Platon 1979. *Theaitetos*. Teoksessa *Teokset, kolmas osa*. Otava.